

soit F l'événement :

$F =$ la famille a au plus une fille.

$$F = \{ (f, g, -g) | g, f, g, -g), \dots, (g, -g, f) \}.$$

$$\text{ou } |F \cap H| = n, \quad P(F \cap H) = \frac{n}{2^n}.$$

$$P(F \cap H) - P(F)P(H) = \frac{n}{2^n} - \frac{n+1}{2^n} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2^n} \left[n - (n+1) + \frac{n+1}{2^{n-1}} \right]$$

H et F sont indépendants ssi $n+1 = 2^{n-1}$.

pour $n=2$, $n+1=3$, $2^1 = 2$ il n'y a pas d'indépendance.

pour $n=3$, $n+1=4$, $2^2 = 4$ on a indépendance.

pour $n=4$, $n+1=5$, $2^3 = 8 \neq 5$ pas d'indépendance.

par récurrence si $n+1 < 2^n$

$$\Rightarrow 2^{n+1} = 2 \times 2^n > 2(n+1) = 2^n + 1 > n+1$$

pour $n > 1$ il n'y a pas indépendance avec n .

il n'y a pas non plus indépendance avec $n+1$

donc H et F sont indépendants seulement pour $n=3$.

///

Exor

1) Il y a C_{32}^5 manières de choisir 5 cartes parmi 32.

1 - Il y a 8 hauteurs diff. on choisit les 5 hauteurs parmi pour dans chaque hauteur on a 4 cartes possibles.

$$\text{donc } P_1 = \frac{C_8^5 \cdot 4^5}{C_{32}^5} = 0,107.$$

2) on choisit la hauteur du brelan ($C_8^3 = 8$ choix)

puis les 3 cartes qui le composent parmi 4 ($C_4^3 = 4$ choix)

on choisit la suite la hauteur de la paire (il ne reste que 7 possibilités)

01218